**第四讲二项分布及其应用、正态分布**

id:2147491646;FounderCES

题组1二项分布及其应用

1*.*[2015 新课标全国Ⅰ,4,5分][理]投篮测试中,每人投3次,至少投中2次才能通过测试*.*已知某同学每次投篮投中的概率为0*.*6,且各次投篮是否投中相互独立,则该同学通过测试的概率为()

A.0.648 B.0.432 C.0.36 D.0.312

2*.*[2014新课标全国Ⅱ,5,5分][理]某地区空气质量监测资料表明,一天的空气质量为优良的概率是0*.*75,连续两天为优良的概率是0*.*6,已知某天的空气质量为优良,则随后一天的空气质量为优良的概率是()

A.0*.*8 B.0*.*75 C.0*.*6 D.0*.*45

3*.*[2017全国卷Ⅱ,13,5分][理]一批产品的二等品率为0*.*02,从这批产品中每次随机取一件,有放回地抽取100次,*X*表示抽到的二等品件数,则*DX=　　　　.*

4*.*[2015 广东,13,5分][理]已知随机变量*X*服从二项分布*B*(*n*,*p*)*.*若*E*(*X*)*=*30,*D*(*X*)*=*20,则*p=　　　.*

5*.*[2016全国卷Ⅱ,18,12分][理]某险种的基本保费为*a*(单位:元),继续购买该险种的投保人称为续保人,续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如下:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 上年度出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ≥5 |
| 保费 | 0*.*85*a* | *a* | 1*.*25*a* | 1*.*5*a* | 1*.*75*a* | 2*a* |

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如下:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 一年内出险次数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ≥5 |
| 概率 | 0*.*30 | 0*.*15 | 0*.*20 | 0*.*20 | 0*.*10 | 0*.*05 |

(Ⅰ)求一续保人本年度的保费高于基本保费的概率;

(Ⅱ)若一续保人本年度的保费高于基本保费,求其保费比基本保费高出60*%*的概率;

(Ⅲ)求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值*.*

6*.*[2015 湖南,18,12分][理]某商场举行有奖促销活动,顾客购买一定金额的商品后即可抽奖*.*每次抽奖都是从装有4个红球、6个白球的甲箱和装有5个红球、5个白球的乙箱中,各随机摸出1个球*.*在摸出的2个球中,若都是红球,则获一等奖;若只有1个红球,则获二等奖;若没有红球,则不获奖*.*

(Ⅰ)求顾客抽奖1次能获奖的概率;

(Ⅱ)若某顾客有3次抽奖机会,记该顾客在3次抽奖中获一等奖的次数为*X*,求*X*的分布列和数学期望*.*

题组2正态分布

7*.*[2015 山东,8,5分][理]已知某批零件的长度误差(单位:毫米)服从正态分布*N*(0,32),从中随机取一件,其长度误差落在区间(3,6)内的概率为()

(附:若随机变量*ξ*服从正态分布*N*(*μ*,*σ*2),则*P*(*μ-σ<ξ<μ+σ*)*=*68*.*26*%*,*P*(*μ-*2*σ<ξ<μ+*2*σ*)*=*95*.*44*%.*)

A.4.56% B.13.59% C.27.18% D.31.74%

8*.*[2015湖北,4,5分][理]设*X~N*(*μ*1,),*Y~N*(*μ*2,),这两个正态分布密度曲线如图13*-*4*-*1所示*.*下列结论中正确的是()

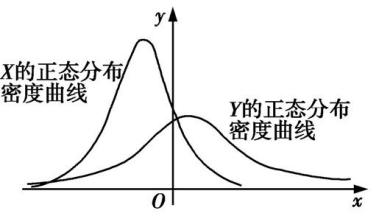


图13*-*4*-*1

A*.P*(*Y*≥*μ*2)≥*P*(*Y*≥*μ*1)

B*.P*(*X*≤*σ*2)≤*P*(*X*≤*σ*1)

C*.*对任意正数*t*,*P*(*X*≤*t*)≥*P*(*Y*≤*t*)

D*.*对任意正数*t*,*P*(*X*≥*t*)≥*P*(*Y*≥*t*)

9*.*[2014新课标全国Ⅰ,18,12分][理]从某企业生产的某种产品中抽取500件,测量这些产品的一项质量指标值,由测量结果得频率分布直方图13*-*4*-*2:

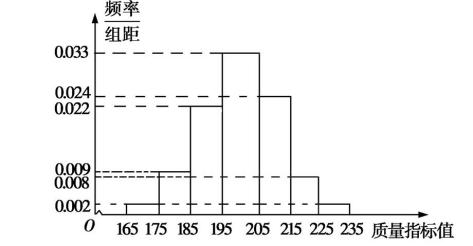


图13*-*4*-*2

(*Ⅰ*)求这500件产品质量指标值的样本平均数和样本方差*s*2(同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(*Ⅱ*)由直方图可以认为,这种产品的质量指标值*Z*服从正态分布*N*(*μ*,*σ*2),其中*μ*近似为样本平均数,*σ*2近似为样本方差*s*2*.*

(i)利用该正态分布,求*P*(187*.*8*<Z<*212*.*2);

(ii)某用户从该企业购买了100件这种产品,记*X*表示这100件产品中质量指标值位于区间(187*.*8,212*.*2)的产品件数*.*利用(i)的结果,求*EX.*

附:≈12*.*2*.*

若*Z~N*(*μ*,*σ*2),则*P*(*μ-σ<Z<μ+σ*)*=*0*.*682 6,*P*(*μ-*2*σ<Z<μ+*2*σ*)*=*0*.*954 4*.*

id:2147491697;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018石家庄市重点高中高三摸底,3]某种电路开关闭合后会出现红灯或绿灯闪烁,已知开关第一次闭合后出现红灯的概率为 ,两次闭合后都出现红灯的概率为 ,则开关在第一次闭合后出现红灯的条件下第二次闭合后出现红灯的概率为()

A. B. C. D*.*

2*.*[2018惠州市二调,5] 设随机变量*ξ*服从正态分布*N*(4,3),若*P*(*ξ<a-*5)*=P*(*ξ>a+*1),则实数*a*等于()

A.7 B.6 C.5 D.4

3*.*[2018洛阳市尖子生第一次联考,14]已知随机变量*X~B*(2,*p*),*Y~N*(2,*σ*2),若*P*(*X*≥1)*=*0*.*64,*P*(0*<Y<*2)*=p*,则*P*(*Y>*4)*=　　　　.*

4*.*[2018陕西省部分学校高三摸底检测,18]一个盒子中装有大量形状、大小一样但质量不尽相同的小球,从中随机抽取50个作为样本,称出它们的质量(单位:克),质量分组区间为[5,15],(15,25],(25,35],(35,45],由此得到样本的质量频率分布直方图(如图13*-*4*-*3)*.*

(1)求*a*的值,并根据样本数据,试估计盒子中小球质量的众数与平均数;

(2)从盒子中随机抽取3个小球,其中质量在[5,15]内的小球个数为*X*,求*X*的分布列和数学期望*.*(以直方图中的频率作为概率)

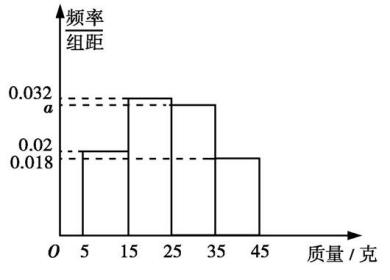


图13*-*4*-*3

5*.*[2018唐山市五校联考,18]某篮球队在某赛季已结束的8场比赛中,队员甲得分统计的茎叶图如图13*-*4*-*4*.*

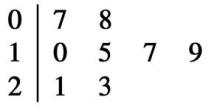


图13*-*4*-*4

(1)根据这8场比赛,估计甲每场比赛中得分的均值*μ*和标准差*σ*;

(2)假设甲在每场比赛的得分服从正态分布*N*(*μ*,*σ*2),且各场比赛间相互没有影响,依此估计甲在82场比赛中得分在26分以上的平均场数(结果保留整数)*.*

参考数据:

≈5*.*66,≈5*.*68,≈5*.*70*.*

正态总体*N*(*μ*,*σ*2)在区间(*μ-*2*σ*,*μ+*2*σ*)内取值的概率约为0*.*954*.*

**B组提升题**

6*.*[2017甘肃二诊,3]抛掷两枚骰子,记事件*A* 为“朝上的2个数之和为偶数”,事件*B*为“朝上的2个数均为偶数”,则*P*(*B|A*)*=*()

A. B. C. D.

7*.*[2018辽宁省五校联考,18]某商场决定从2种服装、3种家电、4种日用品中,选出3种商品进行促销活动*.*

(1)试求选出的3种商品中至少有一种是家电的概率;

(2)该商场对选出的某商品采用抽奖方式进行促销,即在该商品现价的基础上将价格提高60元,规定购买该商品的顾客有3次抽奖机会,若中奖一次,则获得数额为*n*元的奖金;若中奖两次,则获得数额为3*n*元的奖金;若中奖三次,则获得数额为6*n*元的奖金*.*假设顾客每次抽奖中奖的概率都是,请问:该商场将奖金数额*n*最高定为多少元,才能使促销方案对该商场有利?

8*.*[2018南宁市高三摸底联考,18]某省高考改革实施方案指出:该省高考考生总成绩将由语文、数学、外语3门统一高考成绩和学生自主选择的学业水平等级性考试科目成绩共同构成,该省教育厅为了解正在读高中的学生家长对高考改革方案所持的态度,从中随机抽取了100名城乡家长作为样本进行调查,调查结果显示样本中有25人持不赞成意见,如图13*-*4*-*5是根据样本的调查结果绘制的等高条形图*.*

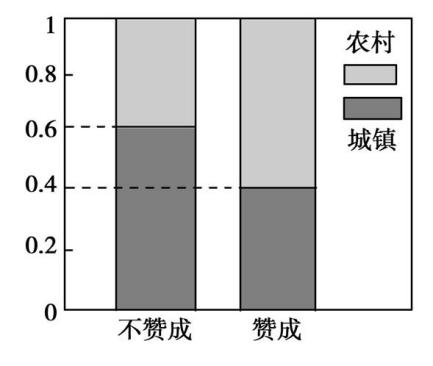


图13*-*4*-*5

(1)根据已知条件与等高条形图完成下面的2*×*2列联表,并判断我们能否有95*%*的把握认为“对高考改革方案的态度与城乡户口有关”?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 赞成 | 不赞成 | 合计 |
| 城镇居民 |  |  |  |
| 农村居民 |  |  |  |
| 合计 |  |  |  |

(2)用样本的频率估计概率,若随机在全省不赞成高考改革方案的家长中抽取3个,记这3个家长中是城镇户口的人数为*X*,试求*X*的分布列及数学期望*E*(*X*)*.*

注:*K*2*=*,其中*n=a+b+c+d.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *P*(*K*2≥*k*0) | 0*.*10 | 0*.*05 | 0*.*005 |
| *k*0 | 2*.*706 | 3*.*841 | 7*.*879 |

9*.*[2018益阳市、湘潭市高三调考,18]某乒乓球俱乐部派甲、乙、丙三名运动员参加某运动会的单打资格选拔赛,本次选拔赛只有出线和未出线两种情况*.*规定一名运动员出线记1分,未出线记0分*.*假设甲、乙、丙出线的概率分别为,,,他们出线与未出线是相互独立的*.*

(1)求在这次选拔赛中,这三名运动员至少有一名出线的概率;

(2)记在这次选拔赛中,甲、乙、丙三名运动员的得分之和为随机变量*ξ*,求随机变量*ξ*的分布列和数学期望*.*

**答案**

id:2147495112;FounderCES

1*.*A由题意得所求概率*P=×*0*.*62*×*(1*-*0*.*6)*+×*0*.*63*=*0*.*648*.*故选A*.*

2*.*A根据条件概率公式*P*(*B|A*)*=*,可得所求概率为*=*0*.*8*.*故选A*.*

3*.*1*.*96依题意知,*X~B*(100,0*.*02),所以*DΧ=*100*×*0*.*02*×*(1*-*0*.*02)*=*1*.*96*.*

4*.* 由得*p=.*

5*.*(Ⅰ)设*A*表示事件:“一续保人本年度的保费高于基本保费”,则事件*A*发生当且仅当一年内出险次数大于1,故*P*(*A*)*=*0*.*20*+*0*.*20*+*0*.*10*+*0*.*05*=*0*.*55*.*

(Ⅱ)设*B*表示事件:“一续保人本年度的保费比基本保费高出60*%*”,则事件*B*发生当且仅当一年内出险次数大于3,故*P*(*B*)*=*0*.*10*+*0*.*05*=*0*.*15*.*

又*P*(*AB*)*=P*(*B*),故*P*(*B|A*)*====.*

因此所求概率为*.*

(Ⅲ)记续保人本年度的保费为*X*,则*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0*.*85*a* | *a* | 1*.*25*a* | 1*.*5*a* | 1*.*75*a* | 2*a* |
| *P* | 0*.*30 | 0*.*15 | 0*.*20 | 0*.*20 | 0*.*10 | 0*.*05 |

*EX=*0*.*85*a×*0*.*30*+a×*0*.*15*+*1*.*25*a×*0*.*20*+*1*.*5*a×*0*.*20*+*1*.*75*a×*0*.*10*+*2*a×*0*.*05*=*1*.*23*a.*

因此续保人本年度的平均保费与基本保费的比值为1*.*23*.*

6*.*(Ⅰ)记事件*A*1*=*{从甲箱中摸出的1个球是红球},

*A*2*=*{从乙箱中摸出的1个球是红球},

*B*1*=*{顾客抽奖1次获一等奖},*B*2*=*{顾客抽奖1次获二等奖},

*C=*{顾客抽奖1次能获奖}*.*

由题意,*A*1与*A*2相互独立,*A*1与*A*2互斥,*B*1与*B*2互斥,且*B*1*=A*1*A*2,*B*2*=A*1*+A*2,*C=B*1*+B*2*.*

因为*P*(*A*1)*==*,*P*(*A*2)*==*,所以

*P*(*B*1)*=P*(*A*1*A*2)*=P*(*A*1)*P*(*A*2)*=×=*,

*P*(*B*2)*=P*(*A*1*+A*2)*=P*(*A*1)*+P*(*A*2)*=P*(*A*1)*P*()*+P*()*P*(*A*2)*=P*(*A*1)(1*-P*(*A*2))*+*(1*-P*(*A*1))*P*(*A*2)*=×*(1*-*)*+*(1*-*)*×=.*

故所求概率为*P*(*C*)*=P*(*B*1*+B*2)*=P*(*B*1)*+P*(*B*2)*=+=.*

(Ⅱ)顾客抽奖3次可视为3次独立重复试验,由(*Ⅰ*)知,顾客抽奖1次获一等奖的概率为,所以*X~B*(3,)*.*

于是*P*(*X=*0)*=*()0()3*=*,

*P*(*X=*1)*=*()1()2*=*,

*P*(*X=*2)*=*()2()1*=*,

*P*(*X=*3)*=*()3()0*=.*

故*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

*X*的数学期望为*E*(*X*)*=*3*×=.*

7*.*B由已知*μ=*0,*σ=*3,所以*P*(3*<ξ<*6)*=*[*P*(*-*6*<ξ<*6)*-P*(*-*3*<ξ<*3)]*=*(95*.*44*%-*68*.*26*%*)*=×*27*.*18*%=*13*.*59*%.*故选B*.*

8*.*C由正态分布密度曲线的性质可知,*X~N*(*μ*1,),*Y~N*(*μ*2,)的密度曲线分别关于直线*x=μ*1,*x=μ*2对称,因此结合题中所给图象可得*μ*1*<μ*2,所以*P*(*Y*≥*μ*2)*<P*(*Y*≥*μ*1),A错误*.*又*X~N*(*μ*1,)的密度曲线较*Y~N*(*μ*2,)的密度曲线“瘦高”,所以*σ*1*<σ*2,所以*P*(*X*≤*σ*2)*>P*(*X*≤*σ*1),B错误*.*对任意正数*t*,*P*(*X*≤*t*)≥*P*(*Y*≤*t*),*P*(*X*≥*t*)≤*P*(*Y*≥*t*),C正确,D错误*.*选C*.*

9*.*(Ⅰ)抽取产品的质量指标值的样本平均数和样本方差*s*2分别为

*=*170*×*0*.*02*+*180*×*0*.*09*+*190*×*0*.*22*+*200*×*0*.*33*+*210*×*0*.*24*+*220*×*0*.*08*+*230*×*0*.*02*=*200,

*s*2*=*(*-*30)2*×*0*.*02*+*(*-*20)2*×*0*.*09*+*(*-*10)2*×*0*.*22*+*0*×*0*.*33*+*102*×*0*.*24*+*202*×*0*.*08*+*302*×*0*.*02*=*150*.*

(Ⅱ)(i)由(*Ⅰ*)知,*Z~N*(200,150),从而

*P*(187*.*8*<Z<*212*.*2)*=P*(200*-*12*.*2*<Z<*200*+*12*.*2)*=*0*.*682 6*.*

(ii)由(i)知,一件产品的质量指标值位于区间(187*.*8,212*.*2)的概率为0*.*682 6,依题意知*X~B*(100,0*.*682 6),所以*EX=*100*×*0*.*682 6*=*68*.*26*.*

id:2147495135;FounderCES

**A组基础题**

1*.*C设“开关第一次闭合后出现红灯”为事件*A*, “开关第二次闭合后出现红灯”为事件*B*,则“开关两次闭合后都出现红灯”为事件*AB*,“开关在第一次闭合后出现红灯的条件下第二次闭合后出现红灯”为事件*B|A*,由题意得*P*(*B|A*)*==*,故选C.

2*.*B由随机变量*ξ*服从正态分布*N*(4,3)可得正态分布密度曲线的对称轴为直线*x=*4*.∵P*(*ξ<a-*5)*=P*(*ξ>a+*1),∴*x=a-*5与*x=a+*1关于直线*x=*4对称,∴(*a-*5)*+*(*a+*1)*=*8,即*a=*6*.*选B*.*

3*.*0*.*1因为随机变量*X~B*(2,*p*),*Y~N*(2,*σ*2),*P*(*X*≥1)*=*0*.*64,所以*P*(*X*≥1)*=P*(*X=*1)*+P*(*X=*2)*=p*(1*-p*)*+p*2*=*0*.*64,解得*p=*0*.*4或*p=*1*.*6(舍去),所以*P*(0*<Y<*2)*=p=*0*.*4,*P*(*Y>*4)*=*(1*-*0*.*4*×*2)*=*0*.*1*.*

4*.*(1)由题意,得(0*.*02*+*0*.*032*+a+*0*.*018)*×*10*=*1,解得*a=*0*.*03*.*

由频率分布直方图可估计盒子中小球质量的众数为20克,

而50个样本中小球质量的平均数为*=*0*.*2*×*10*+*0*.*32*×*20*+*0*.*3*×*30*+*0*.*18*×*40*=*24*.*6(克)*.*

故由样本估计总体,可估计盒子中小球质量的平均数为24*.*6克*.*

(2)由题意知,该盒子中小球质量在[5,15]内的概率为,则*X~B*(3,)*.*

*X*的可能取值为0,1,2,3,

则*P*(*X=*0)*=*()0*×*()3*=*,

*P*(*X=*1)*=*()1*×*()2*=*,

*P*(*X=*2)*=*()2*×*()1*=*,

*P*(*X=*3)*=*()3*×*()0*=.*

∴*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

∴*E*(*X*)*=*0*×+*1*×+*2*×+*3*×=.*

(或者*E*(*X*)*=*3*×=*)

5*.*(1)由题图可得*μ=*(7*+*8*+*10*+*15*+*17*+*19*+*21*+*23)*=*15,

*σ*2*=*[(*-*8)2*+*(*-*7)2*+*(*-*5)2*+*02*+*22*+*42*+*62*+*82]*=*32*.*25,所以*σ*≈5*.*68*.*

所以估计甲每场比赛中得分的均值*μ*为15,标准差*σ*为5*.*68*.*

(2)设甲每场比赛中的得分为随机变量*X*,由(1)得甲在每场比赛中得分在26分以上的概率

*P*(*X*≥26)≈[1*-P*(*μ-*2*σ<X<μ+*2*σ*)]≈(1*-*0*.*954)*=*0*.*023,

设在82场比赛中,甲得分在26分以上的次数为*Y*,则*Y~B*(82,0*.*023)*.*

*Y*的均值*E*(*Y*)*=*82*×*0*.*023≈2*.*

由此估计甲在82场比赛中得分在26分以上的平均场数为2*.*

**B组提升题**

6*.*D解法一事件*AB*包括:(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6),共9个*.*事件*A* 包括:(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6),共18个*.*由题意,得*P*(*AB*)*==*,*P*(*A*)*==*,由条件概率公式,得*P*(*B|A*)*==*,故选D*.*

解法二由题意,得*P*(*A*)*==*,*P*(*AB*)*==*,则*P*(*B|A*)*==*,故选D*.*

7*.*(1)设“选出的3种商品中至少有一种是家电”为事件*A*,

从2种服装、3种家电、4种日用品中,选出3种商品,共有种不同的选法,

选出的3种商品中,没有家电的选法有种,

所以选出的3种商品中至少有一种是家电的概率为

*P*(*A*)*=*1*-=*1*-=.*

(2)设顾客三次抽奖所获得的奖金总额(单位:元)为随机变量*ξ*,

则其所有可能的取值为0,*n*,3*n*,6*n.*

当*ξ=*0时,表示顾客在三次抽奖中都没有中奖,

所以*P*(*ξ=*0)*=*()0(1*-*)3*=*,

*P*(*ξ=n*)*=*()1(1*-*)2*=*,

*P*(*ξ=*3*n*)*=*()2(1*-*)1*=*,

*P*(*ξ=*6*n*)*=*()3(1*-*)0*=.*

所以顾客在三次抽奖中所获得的奖金总额的期望值是

*E*(*ξ*)*=*0*×+n×+*3*n×+*6*n×=*,

由≤60,解得*n*≤64*.*

所以该商场将奖金数额*n*最高定为64元,才能使促销方案对该商场有利*.*

8*.*(1)完成2*×*2列联表,如下:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 赞成 | 不赞成 | 合计 |
| 城镇居民 | 30 | 15 | 45 |
| 农村居民 | 45 | 10 | 55 |
| 合计 | 75 | 25 | 100 |

代入公式,得

*K*2*==*≈3*.*03*<*3*.*841*.*

所以我们没有95*%*的把握认为“对高考改革方案的态度与城乡户口有关”*.*

(2)用样本的频率估计概率,随机在全省不赞成高考改革方案的家长中抽取一人,该人是城镇户口的概率为0*.*6,是农村户口的概率为0*.*4,

*X*的所有可能取值为0,1,2,3*.*

*P*(*X=*0)*=*(0*.*4)3*=*0*.*064,

*P*(*X=*1)*=×*0*.*6*×*(0*.*4)2*=*0*.*288,

*P*(*X=*2)*=×*0*.*62*×*0*.*4*=*0*.*432,

*P*(*X=*3)*=×*0*.*63*=*0*.*216*.*

所以*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* | 0*.*064 | 0*.*288 | 0*.*432 | 0*.*216 |

*E*(*X*)*=*0*×*0*.*064*+*1*×*0*.*288*+*2*×*0*.*432*+*3*×*0*.*216*=*1*.*8*.*

9*.*(1)记“甲出线”为事件*A*,“乙出线”为事件*B*,“丙出线”为事件*C*,“甲、乙、丙至少有一名出线”为事件*D*,

则*P*(*D*)*=*1*-P*( )*=*1*-××=.*

(2)由题意可得*ξ*的所有可能取值为0,1,2,3,

则*P*(*ξ=*0)*=P*( )*=××=*;

*P*(*ξ=*1)*=P*(*A* )*+P*(*B*)*+P*( *C*)*=××+××+××=*;

*P*(*ξ=*2)*=P*(*AB*)*+P*(*AC*)*+P*(*BC*)*=××+××+××=*;

*P*(*ξ=*3)*=P*(*ABC*)*=××=.*

所以*ξ*的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *P* |  |  |  |  |

*E*(*ξ*)*=*0*×+*1*×+*2*×+*3*×=.*